

1. Біртекті емес жылуөткізгіштік теңдеуі

Біртекті емес (сыртқы жылу көзі бар) жылуөткізгіштік теңдеуі:

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$$

мұндағы

- $u(x, t)$ — температура функциясы,
 - a^2 — жылуөткізгіштік коэффициенті,
 - $f(x, t)$ — сыртқы жылу көзі (жылу генерациясы немесе жұтылуы).
-

2. Коши есебінің қойылымы

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & -\infty < x < \infty. \end{cases}$$

Мұнда бастапқы шарт — $t = 0$ мезетінде температура таралуы белгілі:

$$u(x, 0) = \varphi(x).$$

3. Шешу идеясы

Бұл есеп екі бөліктен тұрады:

1. Біртекті бөлігі:

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad u(x, 0) = \varphi(x);$$

2. Біртекті емес бөлігі (сыртқы әсер):

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad u(x, 0) = 0.$$

Осы екеуінің шешімдерін қосу арқылы жалпы шешім табылады.

4. Біртекті теңдеудің шешімі (Пуассон формуласы)

Біртекті теңдеудің шешімі белгілі Пуассон (немесе Гаус) формуласы арқылы табылады:

$$u_1(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi) d\xi.$$

♦ 5. Біртекті емес теңдеудің шешімі (Дюамель қағидасы арқылы)

Егер бастапқы шарт $u(x, 0) = 0$ болса, онда шешім мына түрде жазылады:

$$u_2(x, t) = \int_0^t \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} f(\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

Бұл формула жылу теңдеуі үшін Дюамель интегралы деп аталады.

🧮 6. Жалпы шешім (Пуассон + Дюамель)

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi) d\xi + \int_0^t \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} f(\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

🔍 7. Физикалық мағынасы

- Бірінші қосылғыш — бастапқы температураның уақыт бойынша таралуын көрсетеді.
- Екінші қосылғыш — уақыт бойы сыртқы жылу көзінің ($f(x, t)$) әсерінен пайда болатын қосымша температураны сипаттайды.

Яғни:

Температура $u(x, t)$ бастапқы күйдің және сыртқы әсердің жиынтық нәтижесі болып табылады.

📌 8. Ерекше жағдай

Егер $f(x, t) = 0$ болса, яғни сыртқы жылу көзі болмаса, онда шешім классикалық Пуассон формуласына (біртекті жылу теңдеуі) айналады.

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi) d\xi.$$

1) x - бойынша Фурье түрлендіру

Айта кетейік $u(\cdot, t)$ жақсы қасиеттерді қанағаттандырсын (мыс, $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ немесе өтпелі функция). x - бойынша Фурье түрлендіруді анықтаймыз

$$\hat{u}(k, t) = \mathcal{F}_x\{u(\cdot, t)\}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-ikx} dx.$$

Фурье түрлендіру туындылармен келесідей әрекеттеседі:

$$\mathcal{F}\{u_t\} = \partial_t \hat{u}(k, t), \quad \mathcal{F}\{u_{xx}\} = -(k^2) \hat{u}(k, t).$$

Осыдан теңдеу түрленеді:

$$\partial_t \hat{u}(k, t) = -a^2 k^2 \hat{u}(k, t).$$

2) t - бойынша ОДЖ шешімі

Бұл — қарапайым бірінші ретті ОДЖ:

$$\hat{u}_t + a^2 k^2 \hat{u} = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{u}(k, t) = \hat{u}(k, 0) e^{-a^2 k^2 t}.$$

Бастапқы шаманың Фурье түрлендіруі:

$$\hat{u}(k, 0) = \hat{\varphi}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{-ik\xi} d\xi.$$

Сонымен

$$\hat{u}(k, t) = \hat{\varphi}(k) e^{-a^2 k^2 t}.$$

3) Кері Фурье түрлендіру — шешімнің интегралдық формасы

Кері түрлендіру арқылы

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(k, t) e^{ikx} dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(k) e^{-a^2 k^2 t} e^{ikx} dk.$$

Орнына $\hat{\varphi}(k) = \int \varphi(\xi) e^{-ik\xi} d\xi$ қойып, интегралдардың ретін ауыстыру (әртүрлі шарттарда justified — Fubini / dominated convergence арқылы) береміз:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-\xi)} e^{-a^2 k^2 t} dk \right) d\xi.$$

4) Ішкі интеграл — Гаус интегралы

Енді

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-\xi)} e^{-a^2 k^2 t} dk.$$

Стандартты Гаус интегралының көмегімен (комплектті қисынды қолданып немесе белгілі нәтиже ретінде) алынатыны:

$$I = \sqrt{\frac{\pi}{a^2 t}} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right).$$

(Осы идентификаторды алу үшін k -ны орталау және толық шаршыны жазу керек. Нақты есептеу:

$$e^{-a^2 k^2 t + ik(x-\xi)} = e^{-a^2 t \left(k - \frac{i(x-\xi)}{2a^2 t}\right)^2} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}, \text{ содан кейін қалыпты Гаус интеграл } \int e^{-a^2 t(k - \dots)^2} dk = \sqrt{\pi/(a^2 t)}.)$$

5) Соңғы өрнек — Пуассон формуласы (жылу ядросы)

Осыны орнына қойып:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \sqrt{\frac{\pi}{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi) d\xi.$$

Бұл — дәл Пуассон формуласы (кейде «жылу ядросы» немесе «heat kernel representation» деп те аталады):

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right) \varphi(\xi) d\xi.$$

Мәселе

Қарастырайық теңдеуді

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

бастапқы шарт

$$u(x, 0) = \varphi(x).$$

Мысал ретінде алайық

$$\varphi(x) = e^{-x^2}, \quad f(x, t) = e^{-x^2} e^{-t}.$$

(Яғни бастапқы температура мен сыртқы жылу көзі бірдей Гаусстық пішінде.)

1. Жалпы формула (Дюамель + Пуассон)

Жалпы шешім (жылу ядросы G -пен):

$$u(x, t) = \underbrace{\int_{\mathbb{R}} G(x - \xi, t) \varphi(\xi) d\xi}_{u_1(x, t)} + \underbrace{\int_0^t \int_{\mathbb{R}} G(x - \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau}_{u_2(x, t)},$$

мұндағы бірөлшемде

$$G(z, s) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi s}} \exp\left(-\frac{z^2}{4a^2 s}\right), \quad s > 0.$$

2. Біртекті бөлікті (конволюция) есептеу: u_1

Есептейміз

$$u_1(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x - \xi)^2}{4a^2 t}\right) e^{-\xi^2} d\xi.$$

Бұл — екі Гаусс функциясының конволюциясы; нақты интегралды есептейміз (стандартты әдіс — толық шаршы жазу):

нәтиже:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x - \xi)^2}{4a^2 t} - \xi^2\right) d\xi = 2\sqrt{\pi} a \sqrt{t} \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{4a^2 t + 1}\right)}{\sqrt{4a^2 t + 1}}.$$

Осыдан

$$u_1(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \times 2\sqrt{\pi} a \sqrt{t} \frac{e^{-x^2/(4a^2 t + 1)}}{\sqrt{4a^2 t + 1}} = \frac{1}{\sqrt{4a^2 t + 1}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2 t + 1}\right).$$

Яғни

$$u_1(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1 + 4a^2 t}} \exp\left(-\frac{x^2}{1 + 4a^2 t}\right).$$

(Тексеру: $t \rightarrow 0^+$ кезінде $u_1 \rightarrow e^{-x^2} = \varphi(x)$ — дұрыс.)

3. Ерекше (біртекті емес) бөлікті есептеу: u_2

$$u_2(x, t) = \int_0^t \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right) e^{-\xi^2} e^{-\tau} d\xi d\tau.$$

Ішкі ξ -интеграл алдыңғы есеппен дәл сол түрде шығады (ұқсас конволюция) — тек t орнына $s := t - \tau$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2s} - \xi^2\right) d\xi = 2\sqrt{\pi} a\sqrt{s} \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{4a^2s+1}\right)}{\sqrt{4a^2s+1}}.$$

Осыны бастапқы өрнекке қойсақ, $1/(2a\sqrt{\pi s})$ факторлары жойылып:

$$u_2(x, t) = \int_0^t e^{-\tau} \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)+1}\right)}{\sqrt{4a^2(t-\tau)+1}} d\tau.$$

Ыңғайлы ауыстыру: $s = t - \tau$ болса $d\tau = -ds$ және $\tau : 0 \rightarrow t \leftrightarrow s : t \rightarrow 0$, сондықтан

$$u_2(x, t) = e^{-t} \int_0^t e^s \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{4a^2s+1}\right)}{\sqrt{4a^2s+1}} ds.$$

Сондықтан

$$u_2(x, t) = e^{-t} \int_0^t \frac{e^s}{\sqrt{4a^2s+1}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2s+1}\right) ds.$$

(Бұл интеграл жалпы жағдайда элементар секундтық primitive-ге жатпайды; бірақ ол таза бір айнымалы s бойынша нақты бір өлшемді интеграл болғандықтан, сандық есептеуге немесе кейбір арнайы a, x мәндерінде жуық аналитикалық өрнектерге алынады.)

4. Қорытынды — толық шешім

Барлық қоссақ, Коши есебінің (біздің мысалға) толық шешімі:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1+4a^2t}} \exp\left(-\frac{x^2}{1+4a^2t}\right) + e^{-t} \int_0^t \frac{e^s}{\sqrt{4a^2s+1}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2s+1}\right) ds.$$

- Бірінші мүшесі — бастапқы деректен пайда болған (Пуассон/Гаус) бөлік; $t \rightarrow 0$ кезінде ол $\varphi(x)$ -ке теңеледі.
- Екінші мүшесі — сыртқы көздің (f) уақыт бойынша жинақталған әсерін көрсететін Дюамель-типті қосылғыш.

5. Қосымша мүмкіндіктер

- Егер сіз қалайтын болсаңыз, осы u_2 -ні теңдеу үшін a мен x -тың нақты мәндерінде (немесе t үшін) символдық немесе сандық түрде бағалап көрсетіп бере аламын.
- Немесе басқа φ және f таңдасаңыз, соларға сәйкес дәл есептеуді де жүргіземін (мыс., $\varphi = \mathbf{1}_{[-1,1]}$, немесе $f(x, t) = \delta(x)h(t)$, т. б.).

1 Гаусс интегралының анықтамасы

Гаусс интегралы — келесі интеграл:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

Мақсатымыз: I -нің нақты мәнін табу. Бұл интеграл элементарлы функциялар арқылы есептелмейді, бірақ квадраттап, поляр координат арқылы есептеуге болады.

2 Интегралды квадраттау

Ең тиімді әдіс — интегралды квадраттап, екіөлшемді интеграл жасау:

$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \right) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

Яғни біз x және y бойынша екі өлшемді интеграл аламыз.

3 Поляр координатқа ауыстыру

Екіөлшемді интегралда $x^2 + y^2 = r^2$, және $dx dy = r dr d\theta$.

Сондықтан:

$$I^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr d\theta$$

4 r -бойынша интегралдау

$$\int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr$$

Ауыстыру $u = r^2 \implies du = 2r dr \implies r dr = \frac{du}{2}$.

Сондықтан:

$$\int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr = \int_0^{\infty} \frac{1}{2} e^{-u} du = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-u} du = \frac{1}{2}.$$

5 θ -бойынша интегралдау

$$\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$$

6 Нәтижені жинақтау

$$I^2 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty r e^{-r^2} dr = 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \pi$$

Сондықтан:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

7 Модификацияланған Гаусс интегралы

Кейде интегралда $a > 0$ коэффициент болады:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

Дәлел: $y = \sqrt{a}x \implies dy = \sqrt{a}dx \implies dx = dy/\sqrt{a}$, және интеграл $\int e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}$ болады.

8 Қолдану

1. Эйлер–Пуассон интегралын $p = 1/2$ үшін есептеу.
2. Ықтималдық теориясында нормаль үлестірімнің интегралын есептеу.
3. Физикада жылу өткізгіштік теңдеулерінің фундаменталдық шешімдерінде (жылу ядросы).